ANALISI II ING. INFORMATICA 2022-2023 (591AA) - APPELLO VIII, FEBBRAIO 2024

16-02-2024

Nome e cognome:____

Matricola:____

Durata: 2 ore. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Esercizio 1.

(a) Data una una funzione $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, e fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si dica cosa vuole dire che f ammette la derivata parziale lungo la direzione x_i nel punto dato (in altre parole, $\partial_{x_i} f(x_0)$).

(b) Si faccia vedere che la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^{|xy|}-1)^\beta}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua se $\beta > 1$. È vero che se $\beta > 0$ allora esiste $\partial_x f$ nell'origine?

Esercizio 2. Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy,\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Esercizio 3. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si trovino il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = 1-x^2-y^2$ nel dominio $g(x,y) \leq 0$ dove $g(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1$.

Esercizio 4.

(a) Enunciare le formule di Gauss-Green nel piano.

(b) Calcolare, utilizzando le formule di Gauss-Green, il seguente integrale:

$$\int_{\partial^+ T} x^3 y\, dx + (x^2 - y^2)\, dy$$

dove T è il triangolo con vertici $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

Soluzioni

1a. Esiste finito il limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+he_i)-f(x_0)}{h} := \partial_{x_i} f(x_0)$

1b. Passando a coordinate polari, ed usando Taylor, si ha la tesi. Si ha infatti che $e^{|xy|} - 1 \sim \rho^2 |\cos\theta \sin\theta|$. Per la derivabilità basta applicare la definizione come nel punto precedente per vedere che la funzione ammette derivata parziale nulla nell'origine per il parametro positivo.

2. È una superficie descritta in forma parametrica $z = f(x, y)$, quindi l'elemento d'area è dato da $\sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Quindi

$$\begin{aligned} Area(\Sigma) &= \iint_{x^2+y^2\leq 1,\, x\geq 0,\, y\geq 0} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dxdy \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\rho\, d\rho d\theta \\ &= \frac{\pi}{6}(\rho^2+1)^{3/2}|_0^1 = \frac{\pi(2^{3/2}-1)}{6} \end{aligned}$$

3. Il dominio è costituito dai punti del cerchio (bordo compreso) di centro $(1, 1)$ e raggio unitario. Per i punti interni dobbiamo imporre $\nabla f = (0, 0)$ che è verificata per $(x, y) = (0, 0)$, ma l'origine non appartiene al dominio. Quindi, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange risolviamo il sistema $\nabla \mathcal{L} = 0$ dove $\mathcal{L} = f - \lambda g$:

$$\begin{cases} -2x - 2\lambda(x-1) = 0 \\ -2y - \lambda(y-1) = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

ottenendo $x = y = \frac{\lambda}{\lambda+1}$, quindi $\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$. Risolvendo quest'ultima equazione si ottiene $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$ e dunque $x = y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nel punto $(x, y) = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ la funzione vale $-2 - 2\sqrt{2}$, mentre nel punto $(x, y) = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ vale $-2 + 2\sqrt{2}$. Quindi $(x, y) = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ è punto di minimo assoluto, $(x, y) = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ è punto di massimo assoluto.

4a. Sia D limitato, semplice rispetto agli assi. Dato $F = (P, Q) \in C^1(D)$, allora vale

$$\iint_D \partial_x Q - \partial_y P\, dxdy = \int_{\partial^+ D} P\, dx + Q\, dy.$$

4b. Applicando la formula, l'integrale curvilineo dato si riduce all'integrale doppio

$$\begin{aligned} &\iint_T \partial_x(x^2 - y^2) - \partial_y(x^3 y)\, dxdy = \iint_T 2x - x^3\, dxdy \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{1+x} 2x - x^3\, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x - x^3\, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 (2x - x^3)(1+x)dx + \int_0^1 (2x - x^3)(1-x)dx = 0 \end{aligned}$$